**25.** Непрерывность сложной функции

**Теорема 3.16.** Пусть функция f: X → Z непрерывна в точке x0 ∈ X, а функция g : Z → Y непрерывна в соответствующей точке z0 = f(x0). Тогда сложная функция y = g(f(x)) непрерывна в точке x0.

**Доказательство.** По условию теоремы функция g непрерывна в точке z0, т.е. ∀ ε > 0 ∃ σ = σ(ε) > 0 такое, что

∀z ∈ Z, |z − z0| < σ → |g(z) − g(z0)| < ε. (3.37)

В силу непрерывности функции f в точке x0 для указанного σ > 0 найдется δ = δ(σ) > 0 такое, что

∀x ∈ X, |x − x0| < δ → |f(x) − f(x0)| < σ. (3.38)

Полагая в (3.37) z = f(x), z0 = f(x0) и учитывая (3.38), получаем, что ∀ ε > 0 ∃ δ > 0 такое, что

∀x ∈ X, |x − x0| < δ → |g(f(x)) − g(f(x0))| < ε.

Это означает, в силу определения непрерывности, что функция g(f(x)) непрерывна в точке x0.